1

Thomas de Jong S1608886

1 als $Z(R)$ een subring is moet aan de volgende 3 voorwaarden voldaan zijn

a) $1 \in Z(R)$

b) $a - b \in Z(R)$ (voor alle $a, b \in Z(R)$)

c) $a \cdot b \in Z(R)$ (voor alle $a, b \in Z(R)$)

(eigenschap ring)

a) $1 \in R$ en $1 . x = x = x . 1$ voor alle $x \in R$

dus $1 \in Z(R)$ ✓ ✓

b) neem $a, b \in Z(R)$

voor a & b geldt dat

$ax = xa$ (voor alle $x \in R$)

$bx = xb$

dus $ax + bx = (a+b)x$

$xa + xb = x(a+b)$ } (eigenschappen van een ring) (abelse groep)

$ax + bx = xa + xb$

dus $(a+b)x = x(a+b)$ (voor alle $x \in R$)

$a+b \in Z(R)$ (✓) ✓

c) neem $a, b \in Z(R)$

c_1 $ax = xa$ (voor alle $x \in R$)

c_2 $bx = xb$

dan $abx \overset{c_2}{=} axb \overset{c_1}{=} xab$

dus $a . b \in Z(R)$

4/4

2 | Suppose R is commutative

| dan $ab = ba$ voor alle $a, b \in R$

Bewijs dat $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

gebruik volledige inductie neem $n = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = 1 . b + a . 1 = b + a = a+b$ ✓

dus geldt voor $n = 1$

neem aan dat het voor n geldt (inductie hypothese)

geldt het dan voor $n+1$?

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)(a+b)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\left(\binom{n}{k} a^k b^{n-k} \cdot a\right) + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} b\right)$$

Commutativiteit geeft

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right)$$

$$= \binom{n}{0} a b^n + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} +$$

$$\binom{n}{1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{1} a b^n +$$

$$\binom{n}{2} a^3 b^{n-2} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-1} + \dots$$

$$+ \binom{n}{p} a^{p+1} b^{n-p} + \binom{n}{p} a^p b^{n+1-p}$$

combine these two

$$+ \binom{n}{p+1} a^{p+2} b^{n-2} + \binom{n}{p+1} a^{p+1} b^{n-p}$$

combine these two with $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

$$+ \dots + \binom{n}{n-1} a^n b + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^2$$

$$\binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{n} a^n$$

use the given rule

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}\right) + \overbrace{a^{n+1} + b^{n+1}}^{\text{aan het begin en het einde}}$$

kun je de regel niet gebruik deze blijven dus over.

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k})$$

4/4

2b als $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \Rightarrow R$ commutatief

$(a+b)^n - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = 0$

now takes $n=2$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ba = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} a^k b^{2-k} =$

$a^2 + b^2 + 2ab$

$a^2 + b^2 + ab + ba = a^2 + b^2 + 2ab$

dus $ab = ba$ dus commutatief

4/4

8/8

3 a $(I+J) \cdot (I \cap J) \subset (I \cdot J) + (J \cdot I)$

Bewijs dat als $x \in (I+J) \cdot (I \cap J)$ dan $x \in (I \cdot J) + (J \cdot I)$

$(I+J) \cdot (I \cap J) = \{ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i : n \in \mathbb{Z}_{n>0},\ x_i \in I+J,\ y_i \in I \cap J \}$

$(I \cdot J) + (J \cdot I) = \{ x + y : x \in I \cdot J,\ y \in J \cdot I \}$

$x_i \in I+J = \{ a+b : a \in I,\ b \in J)$

$y_i \in I \cap J$

$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) y_i =$

$$\underbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i y_i}_{\substack{a \in I \quad y_i \in J \cap I \subset J \\ \in I \cdot J}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i y_i}_{\substack{b \in J \quad y_i \in J \cap I \subset I \\ \in J \cdot I}}}_{\in (I \cdot J) + (J \cdot I)}$$

3.5/4

3b $R = \mathbb{Z}$ $I = \mathbb{Z}a$ $J = \mathbb{Z}b$

$I+J = \text{ggd}(a,b)$

$I \cdot J = J \cdot I = \mathbb{Z}a \cdot b$

$I \cap J = \text{kgv}(a,b)$

$(I+J) \cdot (I \cap J) =$

$\text{ggd}(a,b) \cdot \text{kgv}(a,b)\ \mathbb{Z} = ab\ \mathbb{Z}$

$I \cdot J + J \cdot I = I \cdot J = ab\mathbb{Z}$

dus $(I+J) \cdot I \cap J = (I \cdot J) = (I \cdot J) + (J \cdot I)$

voor $R = \mathbb{Z}$

2/2

5.5/6

4a $k[X]/(X^2) \cong k[\epsilon]$

gebruik 1e isomorfie stelling

$k[X] \xrightarrow{\phi} k[\epsilon]$ $a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \xrightarrow{\phi} a_0 + a_1 \epsilon$

$\ker \phi \stackrel{?}{=} (X^2)$

~~$(X^2) \subset \ker \phi$~~

~~$\subset$ neem f n $X^2 f \in (X^2)$ $f = a_0 + \ldots a_n X^n$~~

~~$\phi(X^2 f) = \phi(X^2 a_0 + \ldots X^{n+2} a_n) = 0$~~

~~$(X^2) \supset \ker \phi$~~ k is een lichaam dus dus bewijs dat (X^2) van minimale graad, $\ker \phi$ is immers een ideaal in k

~~$\supset$~~

$0 = \phi(a_0) = a_0$

$0 = \phi(a_0 + Xa_1) = a_0 + a_1 \epsilon = a_1 X$, $a_1 = 0$?

$0 = \phi(\underbrace{a_0 + Xa_1}_{=0} + Xa_2) = 0$ kalke

the argument is not well presented.

dus $\ker \phi = (a_2 X^2) = (X^2)$

(k is immers een lichaam)

Thomas de Jong
51608886 2

ϕ Ringhomorfisme ?

1) $\phi(1) = 1$ ✓

2) $\phi(f)\phi(g) = (a_0 + a_1\epsilon)(b_0 + b_1\epsilon)$

$= a_0 b_0 + (b_1 a_0 + b_0 a_1)\epsilon$

$\phi(f \cdot g) = \phi(a_0 b_0 + (b_1 a_0 + b_0 a_1)X + \dots X^2 + \dots)$

$= a_0 b_0 + (b_1 a_0 + b_0 a_1)\epsilon$

dus $\phi(f \cdot g) = \phi(f)\,\phi(g)$ ✓

ϕ surjectief ? vindt een preimage

$K[\epsilon] \ni a + b\epsilon = \phi(a + bX)$

dus surjectief ✓

ergo $K[\epsilon] \cong K[X]/(X^2)$

2.5/3

4 b $K[\epsilon]$ heeft 3 idealen.

neem een $\tilde{a} \in I$

dan moet gelden dat $r\tilde{a} \in I$ $(\forall r \in K[\epsilon])$

schrijf in $\tilde{a} = a + b\epsilon$

$r = c + d\epsilon$

$(c + d\epsilon)(a + b\epsilon) = ca + (cb + da)\epsilon \in I$

stel $a = 0$

dan $cb\epsilon \in I$

1 [dus dan zou mijn $I = \epsilon K$
(omdat zien $0 \in I$
$a + b \in I$ voor alle $a, b \in I$)

stel $b = 0$

$ca + da\epsilon \in I$

2 [dan hebben we de volledige $K[\epsilon]$
$K[\epsilon] = I$

3 [stel $a = b = 0$
dan $I = \{0\}$

3/3

in alle 3 idealen zit $\{0\}$

verder geldt uiteraard voor 2, 3 dat $a \in I, b \in I, a - b \in I$

voor 1 geldt dit ook aangezien $a + b\epsilon \cdot r \in K[\epsilon]$ $(a + b\epsilon) \cdot \hat{k}\epsilon = a\hat{k}\epsilon \in I$
$\hat{k} \in K$

c) $K[\epsilon]^* \overset{f}{\cong} K^* \times K^+$

neen ~~mogh~~ ~~de~~ ~~refle~~ het homorfisme

$f(a+b\epsilon) = (a, \frac{b}{a})$

$f((a+b\epsilon)\cdot(c+d\epsilon)) \overset{?}{=} f(a+b\epsilon) * f(c+d\epsilon)$

$f((a+b\epsilon)\cdot(c+d\epsilon)) = f(ac + (da+bc)\epsilon) = (ac, \frac{da+bc}{ac})$

$f(a+b\epsilon) * f(c+d\epsilon) = (a, \frac{b}{a}) * (c, \frac{d}{c})$

$= (ac, \frac{da+bc}{ac})$ ✓

f is surjectief, vindt pre image ~~naars~~ (a,b) $f(a+ba\epsilon)$ ✓ ✓

& injectief neen

$f(a+b\epsilon) = (a, \frac{b}{a})$ ✓

$f(c+d\epsilon) = (a, \frac{b}{a}) \Rightarrow c = a \quad d = b$

dus injectief. ✓

3/3

8.5/9

5 a $l_{(a,b)}(x,y) = 0$ asa $a(x-a) + b(y-b) = 0$

implicit diff given

$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2x + 2y'y = 0$

thus $\frac{2x}{y} = 2y'$, $y'(a,b) = \frac{a}{b}$

thus $\frac{a}{b}(x - c) = (y - d)$

furthermore we know that the point (a,b) lies on the tangent thus $c = a$, $d = b$

rewriting gives

not quite clear

$~~t(a,b)~~ \quad a(x-a) + b(y-b) = l(a,b)(x,y) = 0$ 2/3

b $\quad (a+s\epsilon, b+t\epsilon) \in S^1(\mathbb{R}[\epsilon]) \Leftrightarrow l(a,b)(a+s, b+t) = 0$

$\Rightarrow$

~~a+s\epsilon, b+t\epsilon~~ $\quad (b, a \in \mathbb{R})$ s, t

we have that $(a+s\epsilon)^2 + (b+t\epsilon)^2 = 1$

$= a^2+b^2 + 2as\epsilon + 2bt\epsilon$

$= a^2+b^2 + (2as+2bt)\epsilon = 1 \quad +0\epsilon = 0$?

$\Leftrightarrow a^2+b^2 = 1, \quad 2as+2bt = 0 \Leftrightarrow as+bt = 0$

$l(a,b)(a+s, b+t) = as + bt = 0$ ✓

✓ (because of the line above)

$\Leftarrow \quad l(a,b)(a+s, b+t) = 0 = as+bt$

$1 \stackrel{?}{=} (a+s\epsilon)^2 + (b+t\epsilon)^2 = a^2+b^2 + 2\underbrace{(as+bt)}_{=0}\epsilon$

$1 \stackrel{?}{=} a^2+b^2$ this is trivial because (a,b) is the ~~two pts on the tangent~~ point of intersection of the circle a,b with the tangent to the circle

$1 = a^2+b^2$ ✓

argument does not apply

1.5/3

3.5/6

6a $\quad I_{1,2}$ ideal in R_2 $\quad I_1 = f^{-1}(I_2)$ $\quad$ (f is a ringhom.)

I_1 $\quad$ HO: $0 \stackrel{?}{\in} I_1$, $\quad 0 \in I_2$ $\quad$ ~~$0 = f(f^{-1}(0))$~~ $\quad$ ~~$f(a) = f(b)$~~

$f(a) = 0 \quad f(a)$

$-f(a) = 0$

$f(0) = f(a) - f(a) = 0$

$0 \in I_1$ ✓ ✓

$H1 \quad a-b \overset{?}{\in} I_1 \quad a, b \in I_1$

$f(I_1) = I_2$

$f(b), f(a) \in I_2$

$f(a) - f(b) \in I_2$

$f(a-b) \in I_2$

$\in I_1$ ✓

$a-b \in I_1$ ✓

$I_2 \quad ra \overset{?}{\in} I_1$ | $r \in R_1$ and $a \in I_1$

$r \in R_2$

$\tilde{r} \in R_1$

$\tilde{a} \in I_2$

$= f^{-1}(\tilde{r}\tilde{a})$

$f(ra) = f(r) \cdot f(a) \in I_2$ (because of I_2 of I_2) ✓

thus $ra \in I_1$

$R_1 / I_1 \cong R' \subset R_2 / I_2$

R' subring

$a \mapsto a + I_2$

$R_1 \xrightarrow{\phi} R' \subset R_2 / I_2 \qquad \phi(a) = f(a) + I_2$

$\ker \phi = (I_1)$

immers voor $\ker \phi \supset (I_1) \quad a \in I_1 \quad f(a) = b + I_2 = 0 + I_2$

$b \in I_2$

$\ker \phi \subset (I_1)$

$\phi(a) = 0 + I_2$

$f^{-1}(I_2) = I_1$ dus $a \in I_1$ ** immers $f(I_1) = I_2$

3/3

3 Thomas de Jong
s1608886

6b I_2 priem in $R_2 \overset{?}{\Rightarrow} I_1$ prime in R_1

I_2 prime in $R_2 \Rightarrow R_2/I_2$ domain $\Rightarrow$ every subring $R' \subset R_2/I_2$ is also a domain
according to 6a
$\Rightarrow R' \cong R_1/I_1 \Rightarrow R_1/I_1$ domain $\Rightarrow$
I_1 is prime, thus
I_2 prime in $R_2 \Rightarrow I_1$ prime in R_1 3/3

6c ~~take f : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$~~
~~$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = R_2$ $R_1 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$~~

$R_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ $R_2 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

~~take ...~~

~~define~~

$a \bmod 4 \xrightarrow{f} 0 \bmod 7$
$I_1 = \bar{0}$ $I_2 = \bar{0}$ $I_1 \neq f^{-1}(I_2)$
I_2 is maximaal omdat R_2 een lichaam is
R_1 is geen lichaam dus I_1 kan geen maximaal ideaal zijn. 0.5/3

6.5/9

7a $X^n + 2$ eisenstein polynomial because
$p \nmid a_n$
$p \mid a_0$ $p^2 \nmid a_0$
take $p = 2$ then we have
$2 \nmid 1$
$2 \mid 2$ $4 \nmid 2$ ($\mathbb{Z}[X]$ is a UFD)
$\Rightarrow$ irreducible in $\mathbb{Q}[X]$

$\Rightarrow$ primitief $\Rightarrow$ irreducibel $\mathbb{Z}[X]$ 2/2

7b $Y^n - X$ eisenstein polynomial take
$R = R[X]$ $p = X$
$X \nmid a_1$
$X \mid X$ $X^2 \nmid X$ 2/2
~~thus~~ $\Rightarrow$ primitief $\Rightarrow$ irreducibel $K[X, Y]$
(je mag eisenstein hier gebruiken omdat we niet een ontbindingslichaam te maken hebben)

c $X \in \mathbb{Z}[X]$ irreducibel

$X^2 \in \mathbb{Z}[X]$ is reducibel $X \cdot X$ 2/2

d $f(X) = a_0 + a_1 X + \dots + X^n$

met $p \nmid (a_n = 1)$

$p \mid a_i \quad 0 \leq i < n$

$p^2 \nmid a_0$

$f(X^2) = a_0 + a_1 X^2 + a_2 X^4 + \dots X^{2n}$

~~hebben nu~~

~~$p \nmid a_n$~~

~~$p \mid a_i \quad 0 \leq i < n$~~

~~$p^2 \nmid a_0$~~

de coeifficienten zijn onverandert gebleven

dus $p \nmid 1$

$p \mid a_i \quad 0 \leq i < n$

$p^2 \nmid a_0$

$f(X^2)$ is nog steeds monisch dus irreducibel in $\mathbb{Z}[X]$

triviaal. 2/2

8/8

**

~~dus~~ ~~niet~~ dus niet gebruikmaking 1e isomorfie stelling

$$R_1/I_1 \cong R_1/\ker\phi \cong \underbrace{\phi(R_1)}_{\text{dat dit een subring is, is natuurlijk triviaal.}} < R_2/I_2$$

* Question is unclear do you mean for a single n or for all n, because the former is not true if you take n=1 then a+b = a+b which tells you nothing about commutativity.

1	2	3	4	5	6	7		total
4	8	5.5	8.5	3.5	6.5	8	+5	49

mark: 9

28/4/05 H.W.